وزارة التعليم العالي | الامتحان النهائي | الاسم :

جامعة البعث | لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات | الدرجة 100

كلية العلوم – قسم الرياضيات الفصل الثالث لعام 2013-2014 | المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (35درجة) (أ) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2^{n-1}}\right) \quad , |x|<1$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة الآتية : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{n\ln n}$

السؤال الثاني (33درجة ) (أ) لتكن متتالية الدوال $(f_n(x))$ المعرفة على المجال $X=[0,1]$ كما يلي :

$$f_n(x)=x^n(1-x)^n \quad , n\in N$$

المطلوب : أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا

على $X=[0,1]$ مع الإثبات ،ثم أوجد التكامل : $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$ .

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال الآتية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right) \quad , \quad \forall\, x\epsilon[0,2]$$

السؤال الثالث (32درجة ) :(أ) لتكن الدالة $f(x)=\sin x$ معرفة على المجال $(0,\pi)$

المطلوب : أوجد منشور فورييه لهذه الدالة الذي يحوي جيوب التمام فقط على هذه الفترة .

(ب) إذا كان $p>0$ , $q>1$ فاثبت أن : $\beta(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1)$

انتهت الأسئلة

حمص في 2 /2014/9 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

استاذ المقرر

د. منير مخلوف

وزارة التعليم العالي | الامتحان النهائي | الاسم :
---|---|---
جامعة البعث | لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات | الدرجة 100
كلية العلوم – قسم الرياضيات | الفصل الثاني لعام 2013-2014 | المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

**السؤال الأول (35درجة)** (أ) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة الآتية : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos n^2\pi}{n\ln n}$

**السؤال الثاني** (35درجة ) (أ) لتكن متتالية الدوال $(f_n(x))$ المعرفة على R كما يلي :

$$f_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \quad , \ n\in N$$

المطلوب : أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا على R مع الإثبات .

(ب) لتكن $F(x)$ دالة معرفة على المجال $[0,\pi]$ كما يلي :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} \quad , \quad \forall x\in[0,\pi]$$

المطلوب أثبت أن :

$$\int_0^{\pi}F(x)dx = \sum^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^4}$$

السؤال الثالث (30درجة ) :(أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)=|\cos x|$ على المجال $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ .

(ب) باستخدام التكاملات الأولرية أثبت أن :

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha u^2}du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad , \quad \alpha>0$$

انتهت الأسئلة

أستاذ المقرر

د. منير مخلوف

حمص في 2014/6/17 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

وزارة التعليم العالي الامتحان النهائي الاسم :

جامعة البعث لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات الدرجة100

كلية العلوم – قسم الرياضيات الفصل الأول لعام 2013-2014 المدة ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (35درجة) (أ) أدرس تقارب و تباعد الجداء اللانهائي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty} 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}}$$

(ب) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} (1-x)^n$

(ج) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة الآتية : $\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}] \frac{(\ln n)^2}{n}$

السؤال الثاني (30درجة ) (أ) لتكن متتالية الدوال $(f_n(x))$ المعرفة على المجال $X = [2,\infty[$ كما يلي :

$$f_n(x) = nx^2e^{-nx} \quad , \quad n \in N \quad , \forall x \in [2,\infty[$$

المطلوب : أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا على $X$ مع الإثبات .

(ب)لتكن متسلسلة الدوال الآتية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2) \quad , \quad \forall x \in X = ]0,1[$$

المطلوب : أدرس التقارب المنتظم لهذه المتسلسلة على $X = ]0,1[$ .

السؤال الثالث (35درجة ) :(أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ على المجال $(0,\pi)$

والذي يحوي جيوب التمام فقط .

(ب) أثبت صحة الصيغة الآتية :

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2p) \quad , \forall p > 0$$

انتهت الأسئلة

أستاذ المقرر

حمص في 2014/1/14 مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح د.منير مخلوف

جامعة البعث

سلم تصحيح الامتحان النظري

كلية العلوم - قسم الرياضيات    المقرر: تحليل ٣ / سنة ثانية رياضيات    الدرجة: ١٠٠

الفصل الأول للعام ٢٠١٣ - ٢٠١٤

جواب السؤال الأول: (أ) حسب المبرهنة التي تنص «الشرط اللازم والكافي لتقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ هو أن تتقارب المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$    35

وعند تحقق هذا الشرط، ونرمز أن $S$ هو مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$، فيكون

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = e^{S} \text{»}$$

الآن لدينا:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(2^{\frac{(n-1)^2}{n!}}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!}\cdot \ln 2$$

وهذه المتسلسلة هي متسلسلة عددية ذات حدود موجبة، كما أن:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!}\cdot \ln 2 = \ln 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2n+1}{n!} = \ln 2\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!} - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\right]$$

ولكن:

١٠ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = e + e - 1 = 2e - 1$$

أيضاً:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = e-1 \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = e-2$$

وإذن:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n!}\ln 2 = \ln 2\left[2e-1-2(e-1)+e-2\right] = \ln 2\,(e-1) = (e-1)\ln 2$$

وإذن الجداء المعطى متقارب وقيمته تساوي:

$$\prod_{n=2}^{\infty} 2^{\frac{(n-1)^2}{n!}} = 2^{e-1}$$

(ب) نلاحظ أن المتسلسلة المعطاة تكتب بالصورة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}(-1)^n (x-1)^n$$

وهذه المتسلسلة متقاربة عندما $x=1$ أي في مركزها.

الآن إذا كانت $x \neq 1$، فيكون

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2(n+1)]!!}{[2(n+1)+1]!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+3} = 1$$

وإذن

6 $$r = \frac{1}{L} = 1$$

وعندئذٍ تكون المتسلسلة المعطاة متقاربة ضمن الفترة $|x-1| < 1$ أو $0 < x < 2$ أي فترة التقارب هي $]0,2[$ ...

2



عند الطرفات يكون لدينا ،

(أ) عندما $x=0$ فالمتسلسلة المعروضة متباعدة أي المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ متباعدة . فعلى استخدام اختبار راب نجد أن :

3 $$R=\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\frac{2n+3-2n-2}{2n+2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}<1$$

إذن $R<1$ فالمتسلسلة متباعدة بالفعل

(ب) عندما $x=2$ فالمتسلسلة : $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ متباعدة وذلك لأن حدها العام

3 لا يسعى إلى الصفر أي : $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\neq 0$$

(جـ) إن المتسلسلة العددية المعطاة تكتب بالصورة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\ln n)^2$

لأن : $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}=(-1)^{n-1}$

لنضع $a_n=\frac{(\ln n)^2}{n}$ ، نجد أن :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2\ln n)}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

ومن جهة ثانية لنأخذ الدالة : $$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$$

باشتقاق هذه الدالة بالنسبة للمتغير $x$ نحصل على :

$$f'(x)=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

ولكن : $\frac{\ln x}{x^2}>0$ لكل $x\geq 2$ كما أن الأمر : $2-\ln x<0$ لكل $x\geq 9$

8 فإذن المتتالية $(a_n)$ متناقصة من أجل $x\geq 9$

مما سبق نجد أن المتسلسلة المعطاة عبارة عن متسلسلة متناوبة (مترددة) وتحقق شروط اختبار ليبنتز وهي متقاربة وهي متقاربة شرطيًا لأنها متقاربة ومتباعدة مطلقًا لأنه باستخدام اختبار التكامل نجد أن :

5 $$\int_1^{\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}(\ln x)^2\,d(\ln x)=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[(\ln x)^3\Big|_1^b\right]=\infty$$

وهذا يعني أن المتسلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$ متباعدة .

جواب السؤال الثاني. (أ) نعلم أن $te^{-\alpha t} \to 0$ عندما $t \to +\infty$ إذا كانت $\alpha > 0$

وبالتالي فإن $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ تقارباً نقطياً

30 (15 + 15 درجة)

أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad ; \forall x \in [0, +\infty[$$

وبصورة خاصة يكون: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ وذلك لكل $x \in [2, +\infty[$

وبما أن الدوال $f_n(x)$ قابلة للاشتقاق فإن:

$$f_n'(x) = nxe^{-nx}(2 - nx) < 0 \quad ; \quad \forall x > \frac{2}{n} \; ; \; \forall n \in N$$

فالدوال $f_n(x)$ متناقصة على الفترة $]\frac{2}{n}, +\infty[$ ، ولذلك يكون:

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in X} |nx^2e^{-nx} - 0| = \sup |nx^2e^{-nx}| \leq f_n(\tfrac{2}{n}) \ldots$$

أي:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n} e^{-2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |nx^2e^{-nx}| = 0$$

وهنا نحصل حسب اختبار فايرشتراس أن متتالية الدوال المعطاة متقاربة بانتظام من الدالة الصفرية على $X = [2, +\infty[$ .

(ب) إن متسلسلة الدوال: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ متقاربة بشكل غير منتظم على الفترة $X = ]0,1[$

وذلك لأنه بفرض $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي ما معطى، ولنفرض جدلاً أنه يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ حيث أنه من أجل كل $x \in ]0,1[$ ، وكل $m > n > N(\varepsilon)$ يكون لدينا:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| = |x^n(1-x^2) + x^{n+1}(1-x^2) + x^{n+2}(1-x^2) + \ldots + x^m(1-x^2)| =$$

$$= |x^n + x^{n+1} - x^{m+1} - x^{m+2}| = |x|^n \cdot |1+x| \cdot |1 - x^{m-n+1}| \leq$$

$$\leq x^n(1+x) < \varepsilon$$

والتي يتحقق عندما أن يكون

$$n > \frac{\ln\varepsilon - \ln(1+x)}{\ln x} = N(\varepsilon, x)$$

وهذا يعني أن $N(\varepsilon)$ الذي نبحث عن وجودها هي في الحقيقة غير موجودة لأن الطرف الأيمن من المتراجحة الأخيرة لا يمكن تقديره بمقدار أصغر من $\varepsilon$ مستقل عن $x$ على الفترة $X = ]0,1[$ .

ملاحظة : علل استخدام النتيجة الآتية .

إذا كانت $(f_n)$ متتالية متقاربة (متقاربة بانتظام) على المجموعة $X$ ، فإن متسلسلة الدوال : $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n - f_{n-1})$ متقاربة (متقاربة بانتظام) على $X$ أيضاً .

ويمكن ملاحظة أن متسلسلة الدوال تكتب بالصورة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+2})$$

ولما كانت متتالية الدوال $(x^n)$ متقاربة من الدالة الصفرية بشكل غير منتظم على $X = ]0,1[$ (أثبت ذلك) ، وهذا يقتضي بأن متسلسلة الدوال المفروضة تكون كذلك . لأن :

$$(x^n - x^{n+2}) = (x^n - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}) = [(x^n - x^{n+1}) + (x^{n+1} - x^{n+2})]$$

جواب السؤال الثالث : (أ) نجد أن النشر جيب تمامي على الفترة $]-\pi,+\pi[$ وذلك باعتبار أن الدالة المفروضة هي مقصور دالة زوجية $g(x)$ ودورية دورها $2\pi$ حيث أن هذه الدالة تحقق شروط ديرخليه (مستمرة على الفترة $]-\pi,+\pi[$ ومطردة على الفترات $]-\pi,0[$ و $]0,\pi[$) ومنوحية على $]\pi,0[$

35 درجة فقط (17 + 18)

ويكون :

4 $$\frac{\pi-x}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

ولكن .

3 $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

4 $$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

3 $$b_n = 0 \quad ; \forall n = 1,2,3,\dots$$

لذا فإن النشر المطلوب هو :

3 $$\frac{\pi-x}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \quad ; \forall x \in ]0,\pi[$$

(ب) لدينا .

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

وبصورة خاصة إذا وضعنا $p=q$ نحصل على :

$$\beta(p,p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{p-1}(1-t)^{p-1}\,dt \quad ; \forall p>0 \qquad (1)$$

من الشكل الثاني من العلاقة (1) نأخذ التحويل الآتي .

6 $$u = 1-t \Rightarrow du = -dt$$

وبالتعويض نجد أن :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}[t(1-t)]^{p-1}\,dt = -\int_{\frac{1}{2}}^{0}[(1-u)u]^{p-1}\,du = \int_0^{\frac{1}{2}}[u(1-u)]^{p-1}\,du \qquad 2$$

ولما كان تغيير المتحول في الشكل الأخير لا يؤثر على هذا الشكل عندئذ نستطيع أن نكتب العلاقة (1) بالصورة .

w/

(6)

$$\beta(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} [t(1-t)]^{p-1} \, d \qquad (3)$$

الآن بإجراء التحويل الآتي :

$$t(1-t) = \frac{z}{4} \Rightarrow dt = \frac{1}{4}\frac{dz}{\sqrt{1-z}} \quad , \quad (1-z) = (2t-1)^2$$

6

وبالتعويض في (3) نجد أن :

$$\beta(p,p) = 2\int_0^1 \left(\frac{z}{4}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{-\frac{1}{2}} \, dz \qquad (4)$$

ونحن نعلم أن :

$$\beta(p,p) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(p)}{\Gamma(2p)} \qquad (5)$$

أيضاً لدينا من (4)

$$\beta(p,p) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\beta\left(p,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \qquad (6)$$

5

من (5) و(6) نجد أن :

$$2^{2p-1}\cdot\Gamma(p)\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma(2p) \quad , \quad \forall p>0$$

وهذه الصيغة تسمى عادةً صيغة ليجاندر

مدرس المقرر :

د. منير ذلوف

[signature]

سلم تصحيح مادة تحليل /3/ سنة ثانية رياضيات

| | | |
|---|---|---|
| وزارة التعليم العالي | الامتحان النهائي | الاسم |
| جامعة البعث | لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات | الدرجة 100 |
| كلية العلوم – قسم الرياضيات | الفصل الثاني لعام 2012-2013 | المدة ساعتان |

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (36درجة) (أ) أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي واحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

(ب) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n}x^{2n}$

(ج) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{n^2}$

السؤال الثاني (36درجة ) (أ) لتكن متتالية الدوال $(f_n(x))$ المعرفة على المجال $X=[0,1]$ كما يلي :

$$f_n(x)=\frac{2n^2x}{1+n^3x^2}$$

المطلوب : أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ، ثم بين فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية أم لا على $X=[0,1]$ مع الإثبات .

(ب)أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right) \qquad ,\forall x\in[0,3]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^2\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1} \qquad ,\forall x\in R$$

السؤال الثالث (28درجة ) (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)=|\cos x|$ على المجال $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$

(ب) أثبت أن : $\beta(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1)$

من أجل $q>1, p>0$ .

| | | |
|---|---|---|
| | انتهت الأسئلة | أستاذ المقرر |
| حمص في 2013/6/23 | تمنياتي بالتوفيق والنجاح | د.منير مخلوف |

حل أسئلة امتحان تحليل (٣)
الفصل الثاني للعام 2012 - 2013

[11]

**السؤال الأول:**

1) ادرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي وأحسب قيمته في حال التقارب

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

**الحل:** لندرس تقارب السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ ومن أجل ذلك سنستخدم السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ وباستخدام اختبار المقارنة

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2}{n^2+n}=2$$

إذاً السلسلتين من طبيعة واحدة وإن السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ سلسلة ريمان فيها $\alpha=2>1$ فهي متقاربة وبالتالي السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ متقاربة

**حساب قيمة الجداء:**

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

لنأخذ متتالية الجداءات الجزئية ونحاول إيجاد حدها العام

$$P_n=\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)}\right)$$

$$=\prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot$$

$$\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdots\cdots\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot$$

$$\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1}$$

$$\Rightarrow P_n=\frac{1}{3}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{1}{3}\Rightarrow$$

الجداء متقارب وقيمته

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{3}.$$

٢) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} x^{2n}$$

الحل: لنقم بالمقارنة ونطبق اختبار دالامبير على السلسلة المعطاة

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+2} \cdot x^{2n+2}}{2n+2} \cdot \frac{2n}{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)\, 4\, x^2 \cdot 2n}{2n+2} \right| = 4x^2$$



حتى تكون السلسلة متقاربة يجب أن يكون $4x^2<1$ ومنه نحصل على $x^2<\frac{1}{4}$ ومنه $|x|<\frac{1}{2}$ ومجال التقارب $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ وبالتالي

$x \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

لندرس التقارب عند الأطراف:

1) $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} (\frac{-1}{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n \cdot 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$

وهي سلسلة متناوبة فيها $\{\frac{1}{2n}\}$ متتالية متناقصة وتحقق أن

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

حسب قاعدة لايبنتز السلسلة متقاربة

2) $x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n} (\frac{1}{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{2n \cdot 2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$

وهي سلسلة متقاربة وبالتالي مجال التقارب النهائي هو $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

٣) ادرس التقارب المطلق أو المشروط للسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}$$

لدينا

$\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) =$

$= -\cos n\pi = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$

بمـ //

إن السلسلة المعطاة $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ تحقق $\{\frac{1}{n^2}\}$ متتالية متناقصة وأيضاً

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

حسب مبرهنة لايبنتز فإن السلسلة المعطاة متقاربة تماماً أن

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . سلسلة هارمونية ذات حد متقاربة وبالتالي السلسلة المعطاة متقاربة مطلقاً.

السؤال الثاني: ٢) لتكن متتالية الدوال $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $X = [0,1]$ كمايلي

$$f_n(x) = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2}$$

والمطلوب: أوجد $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ ثم بيّن فيما إذا كان هذا التقارب منتظماً لهذه المتتالية أم لا على $X = [0,1]$ مع الإثبات.



الحل: لندرس التقارب النقطي لمتتالية الدوال

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \begin{cases} \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} & ; 0 < x \le 1 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases} = 0$$

متقاربة نقطياً من الدالة الصفرية $f(x) = 0$ أما لدراسة التقارب المنتظم نقوم بتطبيق اختبار فايرشتراس حيث نحسب

$$\forall x \in [0,1] \Rightarrow \alpha_n = \left| f_n(x) - 0 \right| = \left| \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \right| = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2}$$

لدينا

$$\alpha_n = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \Rightarrow \alpha_n' = \frac{2n^2(1+n^5x^2) - 2n^5x \cdot 2n^2x}{(1+n^5x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \alpha_n' = \frac{2n^2 + 2n^7x^2 - 4n^7x^2}{(1+n^5x^2)^2} = \frac{2n^2 - 2n^7x^2}{(1+n^5x^2)^2} =$$

$$= 2n^2 \frac{1 - n^5x^2}{(1+n^5x^2)^2}$$

لحل $\alpha_n' = 0$ نعوض $x^2 = \frac{1}{n^5}$ ومنه $x = \mp \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$

| | $-\infty$ | $-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ | $0$ | $\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_n'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ $0$ | $-$ | $-$ |
| $\alpha_n$ | ↘ | | ↗ | ↗ | ↘ | ↘ |



الحركة العظمى لـ $\alpha_n$ عندما $x = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ بالتبديل نعوض

$$\sup \alpha_n = \frac{2n^2 \cdot n^{-\frac{5}{2}}}{1 + n^5 \cdot \frac{1}{n^5}} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$



$$\Rightarrow \alpha_n = \frac{2n^2x}{1+n^5x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

والتقارب منتظم لهذه المتتالية.

٢) ادرس التقارب المنتظم لمتسلسلات الدوال التالية

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right) \quad \forall x \in [0,3]$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

الحل :

س3/

1) نقوم في البداية بدراسة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}$ حيث $x\in[0,3]$

من أجل ذلك نقوم بتطبيق إختبار فايرشتراس للسلاسل نجد

$$\left|\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right| \leq \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$$

إن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$ متقاربة وذلك لأنه حسب إختبار النهاية مع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ حيث نلاحظ أن

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n\sqrt[3]{n}}{n\sqrt[3]{n+1}} = 3\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = 3$$

السلسلتان في طبيعة واحدة بما أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ سلسلة ريمان فيها $s=\frac{4}{3}>1$ متقاربة وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n\sqrt[3]{n+1}}$ متقاربة وحسب إختبار فايرشتراس للسلاسل تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}$ متقاربة بانتظام على المجال $[0,3]$ وبالتالي يكون الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$ هو جداء متقارب بانتظام نتيجة لذلك على المجال $[0,3]$ وعبارة السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$ هي سلسلة اللوغاريتمات المتعلقة بالجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n\sqrt[3]{n+1}}\right)$ وبالتالي لها نفس طبيعة الجداء عامة فهي متقاربة بانتظام على المجال $[0,3]$ وهو المطلوب.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1}$ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

نأخذ متتالية المجاميع الجزئية لهذه السلسلة

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^2\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^{k-1}$$

لدينا نضع $q = 1+\frac{1}{1+x^2}$ فنحصل على

$$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^2 q^{k-1} = x^2\underbrace{\left(1+q+q^2+\dots+q^{n-1}\right)}_{S}$$

لدينا

$$S = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}$$

$$qS = q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1}+q^n$$

$$S-qS = 1-q^n \Rightarrow S=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

$$\Rightarrow F_n(x) = x^2\frac{1-q^n}{1-q} = x^2\frac{1-\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1-1-\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow F_n(x) = x^2(1+x^2)\left[\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^n-1\right]$$

بما أن $x\in\mathbb{R}$ فإن $\frac{1}{1+x^2}>0$ وذلك $\forall x\in\mathbb{R}$ ومنه

$$1+\frac{1}{1+x^2}>1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)^n=+\infty \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

لذلك فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = +\infty$$

والمتتالية متباعدة لذلك فالسلسلة متباعدة وليست متقاربة نقطياً إذاً
فلا يمكن أن تكون متقاربة بانتظام.

__السؤال السادس:__ (٣) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)=|\cos x|$ على المجال $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

__الحل:__ إن الدالة المعطاة دورية دورها $2T=\pi$ حيث نلاحظ أن

$$f(x)=|\cos x| = \begin{cases}\cos x\ ; & -\frac{\pi}{2}<x\le 0\\ \cos x\ ; & 0\le x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

الجزء الموجب

$$\cos x > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$ ومنه

من أجل ذلك أيضاً نلاحظ أن

$$f(x) = |\cos x| = \cos x$$

$-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$

رسم المخطط البياني للدالة $f(x) = |\cos x|$ على $\mathbb{R}$ بالكامل

إن الدالة المعطاة زوجية بسبب التناظر بالنسبة للمحور oy

لذلك لحساب

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left[1+1\right] = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos(2n+1)x + \cos((2n-1)x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x) + \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{\frac{2}{2n+1} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{2n-1} \sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos n\pi = (-1)^n$$

$$\sin\left((2n-1)\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\right] = \frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{2n-1-2n-1}{4n^2-1}\right] = \frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

$n = 1, 2, \dots$

$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, \dots$

لأن الدالة زوجية

وسلسلة فورييه تعطى بالصورة

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx$$

(ب) أثبت أن

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\,\beta(p,q-1)$$

حيث $q>1\ ,\ p>0$

الحل: لدينا حسب تعريف التابع بيتا

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$\Rightarrow \beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \cdot \frac{p\,dx}{p} = \frac{1}{p}\int_0^1 (1-x)^{q-1}\,d(x^p)$$

لنكامل بالتجزئة ولنفرض

$$u = (1-x)^{q-1}$$

$$du = (q-1)(1-x)^{q-2}(-1)\,dx$$

$$du = (1-q)(1-x)^{q-2}\,dx$$

$$dv = d(x^p) \Rightarrow v = x^p$$

$$\therefore \Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p) = (1-x)^{q-1} x^p \Big|_0^1 - \int_0^1 (1-q)(1-x)^{q-2} x^p dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p) = \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-2} \left[ x^{p-1} - x^{p-1}(1-x) \right] dx$$

$$= \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-2} x^{p-1} dx - \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-1} x^{p-1} dx$$

$$\Rightarrow \beta(p,q) = \frac{1}{p}\int_0^1 (1-x)^{q-1} d(x^p) = \frac{1}{p}\Big[ \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-2} x^{p-1} dx - \int_0^1 (q-1)(1-x)^{q-1} x^{p-1} dx \Big]$$

$$\beta(p,q) = \frac{1}{p}\Big[ (q-1)\beta(p,q-1) - (q-1)\int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p-1} dx \Big]$$

$$\beta(p,q) = \frac{1}{p}\Big[ (q-1)\beta(p,q-1) - (q-1)\beta(p,q) \Big]$$

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p,q-1) - \frac{q-1}{p}\beta(p,q)$$

$$\left(1 + \frac{q-1}{p}\right)\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p,q-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p+q-1}{p}\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p,q-1)$$

$$\Rightarrow \beta(p,q) = \frac{q-1}{p} \cdot \frac{p}{p+q-1}\beta(p,q-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\beta(p,q-1)}$$

وهو المطلوب

انتهى

| جامعة البعث | الإمتحان النهائي | الاسم : |
|---|---|---|
| كلية العلوم | لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات | المدة : ساعتان |
| قسم الرياضيات | الفصل الأول لعام 2012-2013 م | الدرجة : 100 |

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (36درجة) أجب عن ثلاثة فقط مما يلي :

(أ) أدرس تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.(2n+1)$$

(ب) أدرس التقارب المطلق أو المشروط للمتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$

(ج)أدرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي ، وأحسب قيمته في حال التقارب:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}})$$

(د) أوجد مجال تقارب متسلسلة القوى التالية : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

حطوب

السؤال الثاني(36درجة) (أ) لتكن متتالية الدوال $(f_n(x))$ المعرفة على المجال $X=[0,1]$ كما يلي :

$$f_n(x)=x^n(1-x)^n \quad ,n\in N$$

المطلوب : أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ثم بيّن فيما إذا كان هذا التقارب منتظم لهذه المتتالية

على المجموعة $X$ مع الإثبات ، ثم أوجد لتكامل : $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال التالية :

$$\sum_{1=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2} \quad , \forall x\in[0,\infty]$$

السؤال الثالث(28درجة) (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)=|\sin x|$ على المجال $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$ .

(ب) باستخدام التكاملات الأولرية أحسب قيمة التكامل التالي :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi\cos^4\varphi\, d\varphi$$

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي التوفيق والنجاح

أستاذ المقرر

د. منير مخلوف

حمص في 2013/2/10

حل أسئلة دورة عام [illegible]

2013 - 2012

[1]

٥٩

**السؤال الأول:** أجب عن ثلاثة فقط من الأسئلة التالية:

أ) ادرس تقارب أو تباعد السلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}(2n+1)$$

ب) ادرس التقارب المطلق أو المشروط للسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$$

ج) ادرس تقارب أو تباعد الجداء اللانهائي التالي، واحسب قيمته في حال التقارب

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$$

د) أوجد مجال تقارب سلسلة القوى التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

**الحل:** أ) نستخدم اختبار راب

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right]$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n)!!\,(2n+1)}{(2n-1)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\frac{1}{(2n+3)} =$$

$$= \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-1 = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}-1 = \frac{4n^2+4n+1-4n^2-10n-6}{4n^2+10n+6} =$$

$$= \frac{-6n-5}{4n^2+10n+6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{-6n^2-5n}{4n^2+10n+6} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} < 1$$

السلسلة متباعدة حسب راب

٢) لندرس السلسلة — ب/ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^2}{n}$

نلاحظ أن المتتالية $\{a_n\}=\{\frac{(\ln n)^2}{n}\}$ متتالية مطردة ع وأن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$$

نفرض نهاية الدالة $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على المجال $]1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

حسب إختبار لايبنز السلسلة متقاربة

لندرس سلسلة القيم المطلقة منها

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$$

حسب إختبار المقارنة لدينا

$\ln n > 1$ $\quad n \geq 3$

$(\ln n)^2 > 1 \Rightarrow \frac{(\ln n)^2}{n} > \frac{1}{n}$

بما أن السلسلة $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ توافقية متباعدة حسب إختبار ~~المقارنة~~

تكون السلسلة $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$ متباعدة وبالتالي السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$ متباعدة.

أو باستخدام الاختبار التكاملي إن المتتاليتين

$S_N=\sum_{K=1}^{N}\frac{(\ln K)^2}{K}$ و $t_N=\int_1^N\frac{(\ln x)^2}{x}dx$ هما عبارة عن متتاليتين إما متقاربتين معاً أو متباعدتين معاً.

ندرس تقارب المتتالية $\{t_n\}$ حيث نضع

$$t_n=\int_1^n \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx=\left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^n=\frac{(\ln n)^3}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^3}{3}=+\infty$$

المتتالية $\{t_n\}$ متباعدة وبالتالي المتتالية $\{S_n\}$ حيث $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln k)^2}{k}$ متباعدة والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}$ متباعدة.

ومنه فإن السلسلة الاصلية تكون متقاربة شرطيا".

٢) لندرس تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ وتقاربه يكافئ دراسة تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ حسب إختبار نهاية النسبة مع السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ نجد أن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

السلسلتان من طبيعة واحدة وبما أن السلسلة $\sum\frac{1}{n}$ متباعدة فإن السلسلة $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ متباعدة وبالتالي الجداء المعطى متباعد وليس له نهاية.

٤) لنوجد مجال التقارب للسلسلة القوى

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

لنعتبر السلسلة من أجل ذلك نطبق إختبار دالامبير

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{x^{n+1}}\right|=|x|.$$

وبالتالي يحصل على التقارب إذا كان $|x|<1$ وبالتالي مجال التقارب

هو $-1<x<1$ وحيث $x\in ]-1,+1[$

ندرس التقارب عند الأطراف

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

حسب إختبار نهاية النسبة مع السلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1$$

السلسلة ذات طبيعة واحدة بما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ تقارب ينتج تقارب $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$$

بما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة

فالسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ متقاربة وبالتالي نطاق التقارب $[-1,1]$

طريقة ثانية :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

نحسب العدد $L$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

$$\rho = \frac{1}{L} = 1$$

مجال التقارب $]x_0-\rho, x_0+\rho[$ حيث

$x_0 = 0$

$\rho = 1$

$]-1,1[$ والدراسة عند الاطراف واجبة.

السؤال الثاني: ١) لتكن متتالية الدوال $\{f_n(x)\}$ المعرفة على المجال $X=[0,1]$ كما يلي:

$$f_n(x) = x^n(1-x)^n \quad ; n \in \mathbb{N}$$

والمطلوب: أ) أوجد $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ ثم بيّن فيما إذا كان هذا التقارب منتظماً لهذه المتتالية على المجموعة $X$ مع الإثبات ثم أوجد التكامل

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$$

٢) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^2} \quad x\in[0,+\infty[$$

الحل: ١) لنوجد النهاية النقطية:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x^n(1-x)^n = 0 \quad \forall x\in[0,1]$$

التقارب النقطي يتم للدالة الصفرية $f(x)=0$.

حسب اختبار فايرشتراس

$$\alpha_n = \sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-f(x)| = \sup_{0\le x\le 1}|x^n(1-x)^n| =$$

$$= \sup_{0\le x\le 1}(x^n(1-x)^n)$$

لنفرض $g(x)=x^n(1-x)^n$ ولنحسب:

$$g'(x) = nx^{n-1}(1-x)^n - nx^n(1-x)^{n-1}$$

$$g'(x) = n x^{n-1}(1-x)^{n-1}\left[1-x-x\right]$$

ومنه $$g'(x) = n x^{n-1}(1-x)^{n-1}(1-2x)$$

نحل $g'(x)=0$ نحصل على $x=0$ ، $x=1$ ، $x=\frac{1}{2}$ وجدول التغيرات

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ | $\searrow$ | $1$ |

$$\Rightarrow \alpha_n = \sup_{0\le x\le 1}\left(x^n(1-x)^n\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$$ والتقارب منتظم.

٢) بما أن التقارب منتظم لمتتالية الدوال المعطاة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x^n(1-x)^n\,dx =$$

$$= \int_0^1 0\,dx = \left[C\right]_0^1 = C - C = 0$$

علماً أن هذا التكامل بالشكل:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^{n+1-1}(1-x)^{n+1-1}\,dx =$$

$$= \beta(n+1, n+1) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{(n!)\cdot(n!)}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(2n-(n-1))(n!)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{n}{2n}\cdot\frac{n-1}{2n-1}\cdot\frac{n-2}{2n-2}\cdots\frac{2}{n+2}\cdot\frac{1}{n+1} <$$

$$< \frac{1}{2n+1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}}_{n \text{ مرة}} = \frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx < \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

ب) لندرس التقارب المنتظم للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$ ; $x\in[0,+\infty[$

حسب اختبار فايرشتراس للتقارب المنتظم للسلاسل التابعية

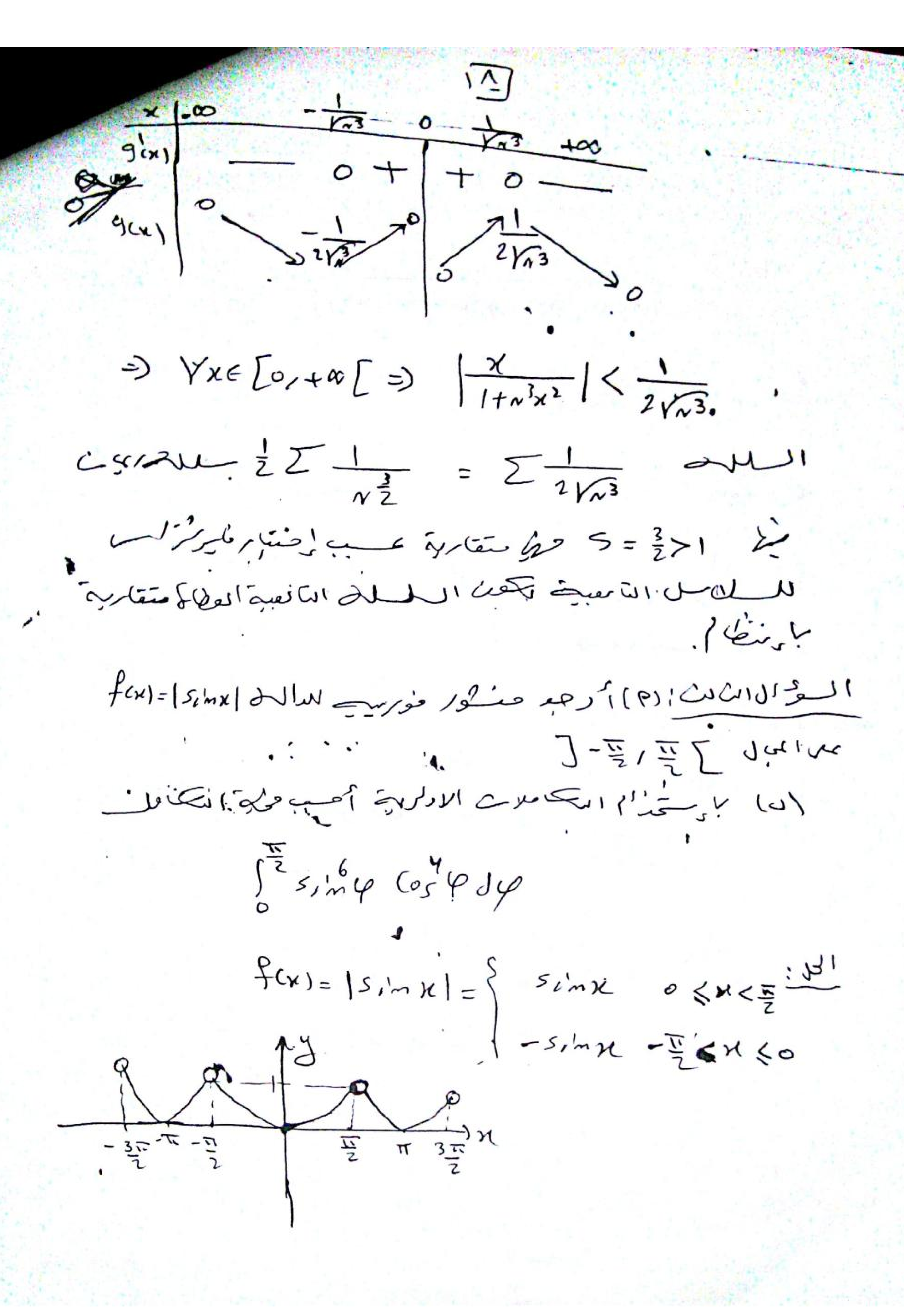
~~نأخذ~~ نقوم بتقدير المقدار التالي: $\left|\frac{x}{1+n^3x^2}\right|$

لنفرض $g(x) = \frac{x}{1+n^3x^2}$ نحصل على

$$g'(x) = \frac{1+n^3x^2-2n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2} = \frac{1-n^3x^2}{(1+n^3x^2)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{n^3} \Rightarrow x = +\frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$





| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ | | $0$ | | $\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{2\sqrt{n^3}}$ | ↗ | $0$ \| $0$ | ↗ | $\frac{1}{2\sqrt{n^3}}$ | ↘ | $0$ |

$$\Rightarrow \forall x \in [0, +\infty[ \Rightarrow \left|\frac{x}{1+n^3x^2}\right| < \frac{1}{2\sqrt{n^3}}.$$

السلسلة $\sum \frac{1}{2\sqrt{n^3}} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ بسلسلة ريمان

حيث $s = \frac{3}{2} > 1$ فهي متقاربة حسب إختبار فايرشتراس للسلاسل الدالية تكون السلسلة الدالية المعطاة متقاربة بانتظام.

السؤال الثالث: (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x) = |\sin x|$ على المجال $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(ب) باستخدام التكاملات الأويلرية أحسب قيمة التكامل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi \cos^4\varphi \, d\varphi$$

الحل:

$$f(x) = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ -\sin x & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \end{cases}$$

التمديد المعطى زوجي لذلك فإن معاملات فورييه هي

ح// $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,dx$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$

$b_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$ حيث $T = \frac{\pi}{2}$ نصف الدور

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{4}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}\left[0 - 1\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos(2nx)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x\right)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)x) + \frac{1}{2n-1}\cos((2n-1)x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2n+1}\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2n-1}\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right]$$

$\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(n\pi) = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$

$\cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(n\pi) = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2n-1-2n-1}{4n^2-1}\right] =$$

$$= \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{T}$$ سلسلة فوريه

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

ب)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\varphi \cos^4\varphi \, d\varphi$$

نفرض $t = \sin^2\varphi$

$$dt = 2\sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi$$

$$\varphi = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$I = \int_0^1 t^3 (1-t)^2 \cdot \frac{dt}{2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{12}{2})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)}$$

$$\Gamma(6) = 5! = 120 \qquad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$I = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{120} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\pi}{(4)(8)(24)} = \frac{9\pi}{(32)(48)} = \frac{3\pi}{512}$$

تمرين: ادرس تقارب الجداءات التالية مع حساب قيمتها إن أمكن:

1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2n-1}\right) \quad ; |x|<1$

الحل:

لنأخذ متتالية الجداءات الجزئية منه حيث

$$P_{2n-1}(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2k-1}\right)=(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots(1+x^{2n-1})$$

$$P_{2n}(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{2k}\right)=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots(1+x^{2n})$$

$$P_{n}(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(1+x^{k}\right)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^{n})$$

ومنه نلاحظ أن

$$\boxed{P_n(x)=P_{2n-1}(x)\cdot P_{2n}(x)}$$

من جهة أخرى

$$P_{2n}(x)=(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)\cdots(1+x^{2n})=$$

$$=(1+(x^2)^1)(1+(x^2)^2)(1+(x^2)^3)\cdots(1+(x^2)^n)=$$

$$=P_n(x^2) \Rightarrow \boxed{P_{2n}(x)=P_n(x^2)}$$

$$(1-x)P_n(x)=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^n)=$$

$$(1-x^2)P_n(x)=(1+x)(1+x^3)\cdots(1+x^{2n-1})(1-x^{2n-2})=P_{2n-1}(x)(1-x^{2n-2})$$

$$\Rightarrow (1-x^2)P_n(x)=P_{2n-1}(x)\left(1-x^{2n-2}\right)$$

$$\Rightarrow (1-x^2)P_{2n-1}(x)\cdot P_{2n}(x)=P_{2n-1}(x)\left(1-x^{2n-2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{2n}(x)=\frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2}}$$

طريقة أخرى

$$P_n(x^2) = P_{2n}(x) = \frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2} = \frac{1-(x^2)^{n-1}}{1-(x^2)^1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n(x) = \frac{1-x^{n-1}}{1-x}}$$

$$\Rightarrow P_{2n-1}(x) = \frac{P_n(x)}{P_{2n}(x)} = \frac{\frac{1-x^{n-1}}{1-x}}{\frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2}} = \frac{(1-x^{n-1})(1-x)(1+x)}{(1-x)(1-(x^{n-1})^2)}$$

$$= \frac{(1-x^{n-1})(1+x)}{(1-x^{n-1})(1+x^{n-1})} = \frac{1+x}{1+x^{n-1}}$$

$$\Rightarrow P_{2n-1}(x) = \frac{1+x}{1+x^{n-1}}$$

لنحسب

$$\lim_{n\to+\infty} P_{2n-1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+x}{1+x^{n-1}} = 1+x \quad ; |x|<1$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2n-1}) = 1+x$$

2) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)$

لندرس تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ حسب إختبار المقارنة

حيث $\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n} \Leftarrow \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^2}$

السلسلة $\sum\frac{1}{n^2}$ سلسلة متقاربة وحسب إختبار المقارنة فإن

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$ متقاربة وبالتالي الجداء متقارب

[١٣]

نناقش متتالية الجداءات الجزئية إلى حدها العام

$$P_n = \prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n+1}\left(\frac{k-\sin\frac{1}{k}}{k}\right)$$

الحل

$$P_1 = 1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}$$

$$P_2 = \left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\right)$$

$\vdots$

$$P_n = \left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\sin\frac{1}{n+1}\right)$$

$$P_{n+1} = \left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\sin\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\sin\frac{1}{n+2}\right)$$

لنحسب

$$P_{n+1}-P_n = \left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\sin\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\sin\frac{1}{n+1}\right)\left(-\frac{\sin\frac{1}{n+2}}{n+2}\right)$$

$$P_{n+1}-P_n < 0 \Rightarrow P_{n+1} < P_n$$ متناقصة تماماً

ولدينا

$$\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k} \le \frac{1}{k^2} \Rightarrow -\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k} \ge -\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k} \ge 1-\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \le \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k}\right)$$

لنحسب

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

$$= \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots$$

$$\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\frac{n+1}{2n} \leq \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)$$

٨٥

وعبارة المتتالية $\left(\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)\right)$ متتالية متناقصة تماماً فهي متقاربة

من حدها الأدنى أي

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} \leq \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{k}\right) = (1 - \sin 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - \sin 1}{2}$$

انتهى

م. ربا صالح

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الإمتحان النهائي
لمقرر تحليل (3) السنة الثانية رياضيات
الفصل الأول لعام 2011-2012 م

الإسم :
المدة : ساعتان
الدرجة : 100

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول( 35درجة ) : (أ) أدرس تقارب أوتباعد السلاسل التالية :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}\right)$$

(ب) أدرس تقارب أوتباعد الجداءات اللانهائية التالية وأحسب قيمته في حال التقارب :

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \quad , \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2n-1}\right) \quad , \quad |x|<1$$

السؤال الثاني(35درجة ) (أ) لتكن متتالية الدوال $f_n(x)$ المعرفة كمايلي :

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2} \quad , x\in[0,1] \quad ,n\in N$$

المطلوب:(1) أوجد $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ثم بين فيما إذاكان هذا التقارب منتظم أم لامع الإثبات .

(2) بين صحة المساواة التالية : $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx$ مع الإثبات .

(ب) أدرس التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال: $\sum_{n=1}^{\infty} x^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{n-1}$ على $R$.

السؤال الثالث(30درجة) : (أ) أوجد منشور فورييه للدالة $f(x)=|\sin x|$ على المجال $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$ .

(ب) : أثبت أن : $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad ,\forall x>0$

انتهت الأسئلة
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر
د . منير مخلوف